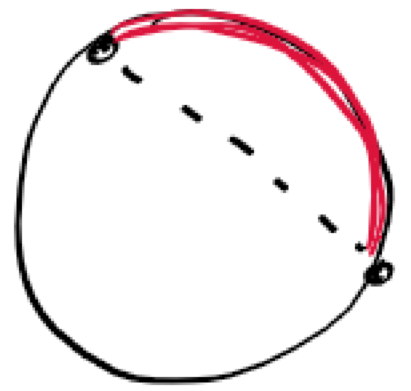
Metrické prostory

Připomenutí: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^d$:

- symbol $|x-y|$ značí *vzdálenost* x od y (v $\mathbb{R}^d$: $\|x-y\|$).
- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$

tj. $a_n \to a \iff$ vzdálenost a_n od $a \to 0$.

Zobecnění: Další „prostory", kde umíme měřit vzdálenost: $[0,1]$, $\mathbb{R}^3$, S^1 (kružnice), S^2 (povrch koule), povrch asteroidu...



Maximální zobecnění:

abstraktní metrický prostor.

nemusí to být VP, přesto umíme měřit vzdál.

Ale musíme se vzdát značení $|x-y|$ apod. (obecně nejsou def. operace mezi prvky MP).

Definice 31: Buď M libovolná množina. Funkce $\rho: M \times M \to [0,\infty)$ se nazývá **metrika na M**, platí-li následující axiomy: $\forall x, y, z \in M$:

(i) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$.

(tedy pro různé body je kladná)

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (symetrie)

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$. ($\Delta$-nerovnost)

(„Přidáním průchozího bodu y se vzdálenost (délka trasy) nezkrátí")

Dvojici (M, ρ) naz. metrický prostor.

Příklady 32: • $x, y \in \mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$

$\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ je metrika.

(i) $x = y \iff |x-y| = 0$ ✓

(ii) $\rho(x,y) = |x-y| = |y-x| = \rho(y,x)$ ✓

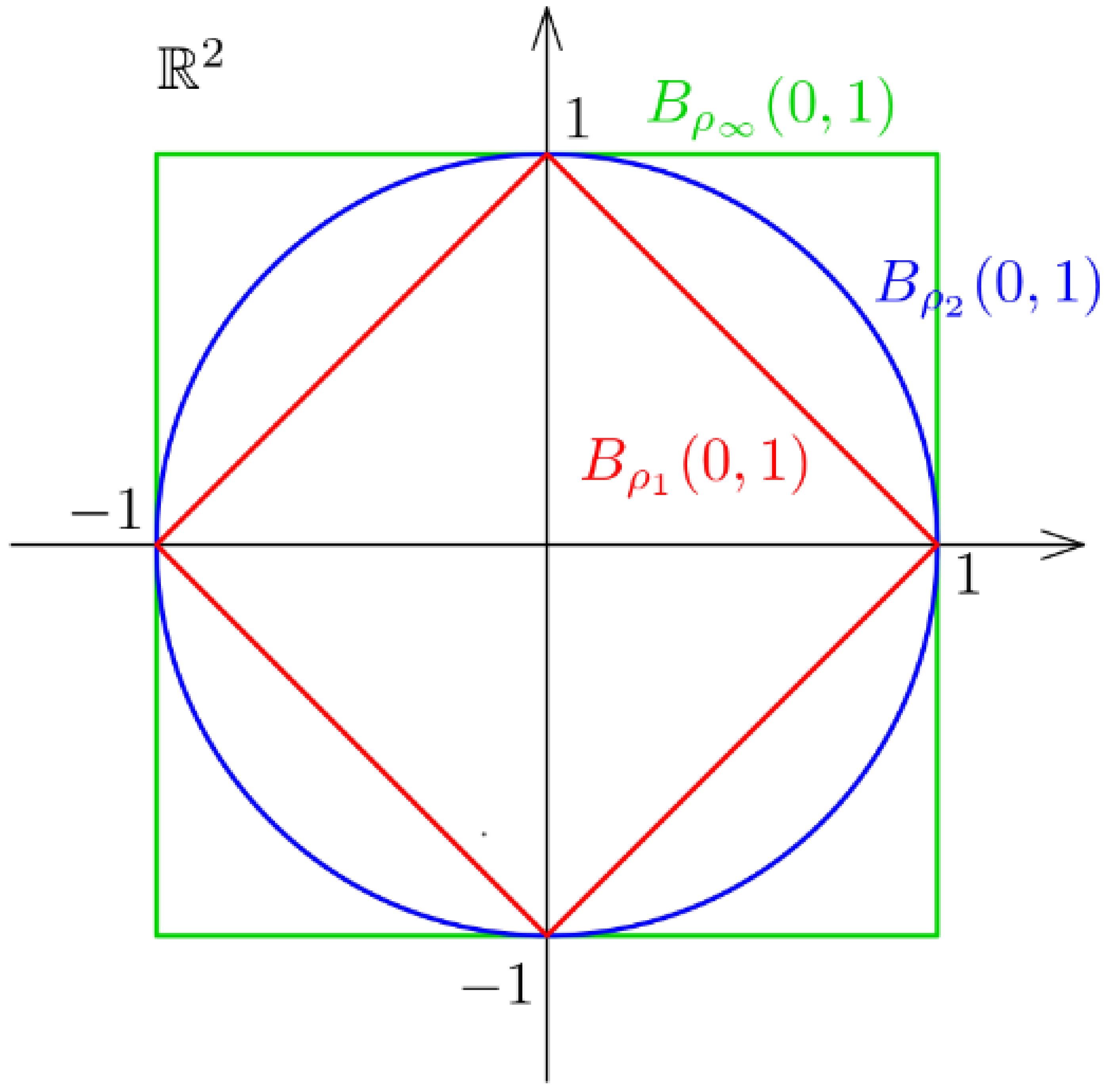
(iii) Δ-ner. $\Leftarrow$ Δ-ner pro $|\cdot|$.

• $\rho_2(x,y) = \rho_e(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $x,y \in \mathbb{R}^d$.

(jde o metriku: těžké cvičení)

• $\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

• $\rho_\infty(x,y) = \rho_{max}(x,y) = \max\{|x_i-y_i| : i=1,\dots,d\}$



Definice 33: Buď (M,ρ) MP, $c\in M$, $\delta>0$.
Definujeme **otevřenou** kouli
$$B(c,\delta) = B_\rho(c,\delta) = \{x\in M : \rho(x,c) < \delta\}.$$

• **diskrétní metrika** na $\mathbb{R}$ (obecně na M):

$$\rho_d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y \\ 1, & \text{pokud } x \neq y \end{cases}.$$

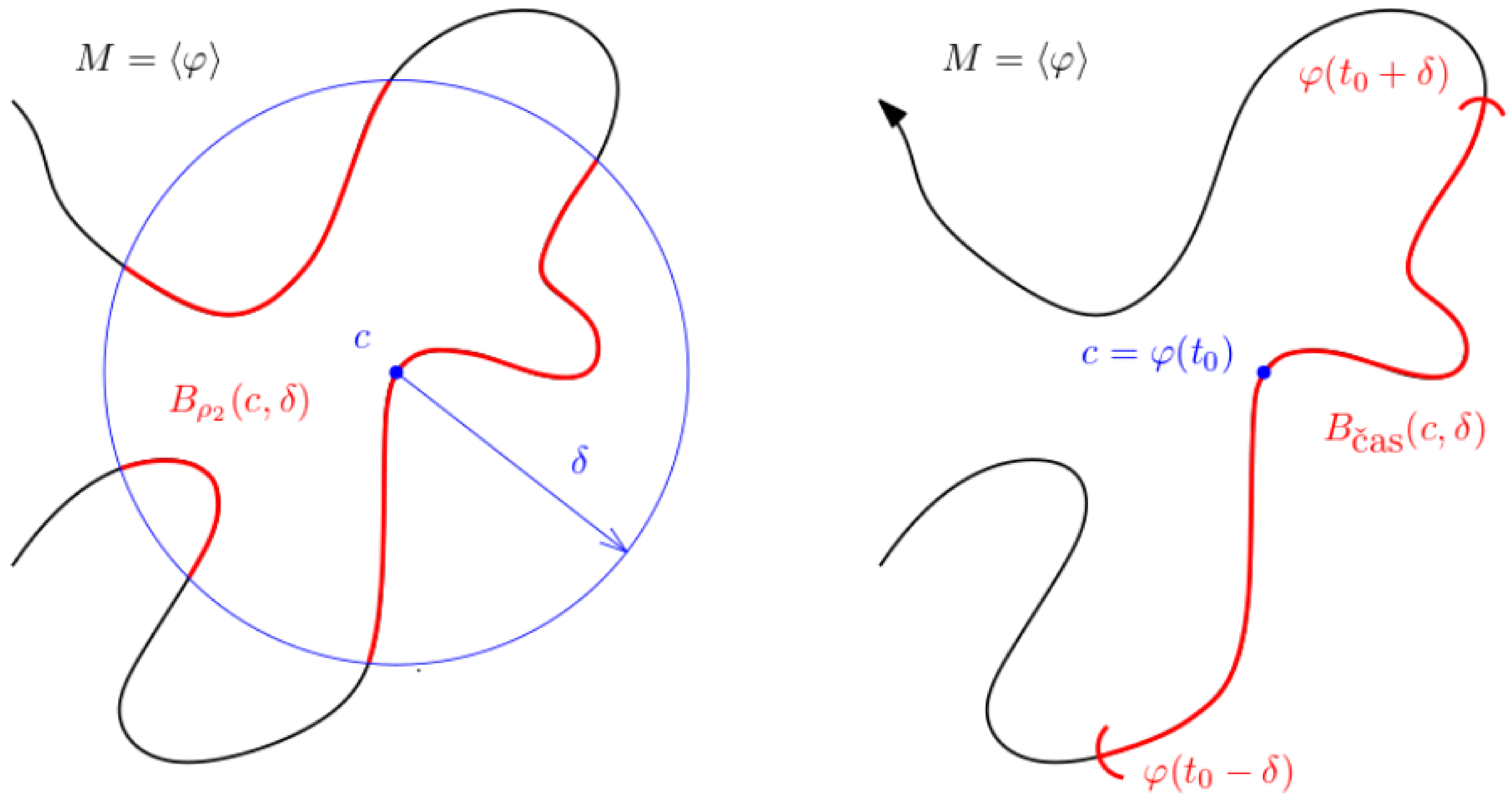
$\rho_d(1,10) = 1$, $\rho_d(\pi, e) = 1$, $\rho_d(1,1) = 0$.

Cv. ρ_d je metrika. (na lib. množině)

Poznámka: Dokazujeme obecné V. o MP.
Tedy libovolná struktura splňující ax. MP „splňuje" všechny dokázané V o MP.
Za (M, ρ) budeme moci dosadit:
$(\mathbb{R}, |x-y|)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$, $(\mathbb{R}^d, \rho_\infty)$ atd.

Podobně: $3 + 4 = 7$ abstraktní V.
3 lidi + 4 lidi = 7 lidí (konkrétní př.)
3 ♡ + 4 ♡ = 7 ♡.

Dále ke kouli: Uvažujme křivku $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.
$\langle \varphi \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$. $M := \langle \varphi \rangle$ φ je prostá.
$c \in M$, $\delta > 0$. $\|\varphi'\| > 0$.



(M, ρ_2)

Zde měříme vzdálenost časem, tj.:
$$\rho_{\check{c}as}(\varphi(s), \varphi(t)) = |s-t|$$

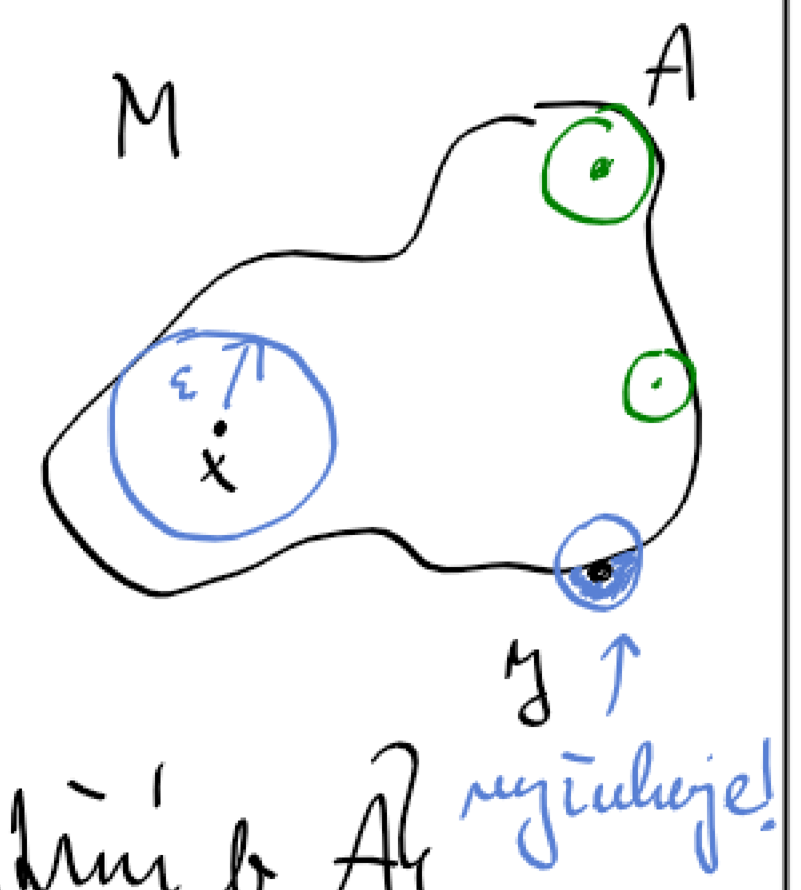
Definice 34: (M,ρ) MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ posl. $(f : \mathbb{N} \to M)$. Řekneme, že $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ $(\lim x_n = x)$ $\overset{def}{\iff}$ $\underbrace{\rho(x_n, x)}_{\text{posl. } \mathbb{R}\text{-čísel}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (1. SEM.)

Cvičení 35: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff$

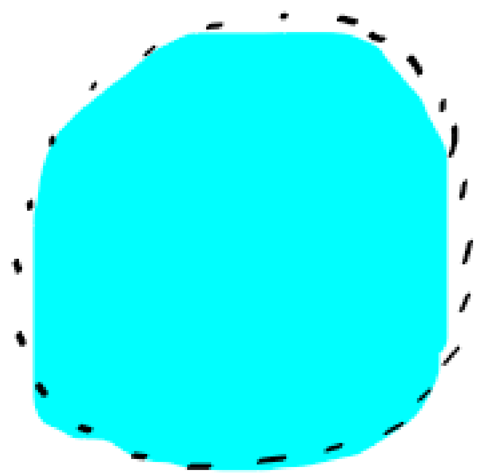
$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : \ \rho(x_n,x) < \varepsilon.$$
$$: \ x_n \in B(x,\varepsilon)$$

Definice 36: (M,ρ) MP, $A\subseteq M$ lib. pevn.

- Řekneme, že bod $x\in A$ je vnitřní bod A, pokud $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subseteq A$. $[=\{y\in M : \rho(x,y)<\varepsilon\}]$
- A je otevřená, pokud všechny její body jsou vnitřní body A.
- $A^\circ = \mathrm{Int}(A) = \{x\in A : x \text{ je vnitřní b. } A\}$



Obr.:



Třeba koule bez hr. kružnice je ot. množina.

Lemma 37: (i) A je otevřená $\iff A = A^\circ$.

(ii) otevřená koule je otevřená množina

Důkaz: (i) přímo z definice.

(ii) Mějme $c\in M$, $\delta>0$.

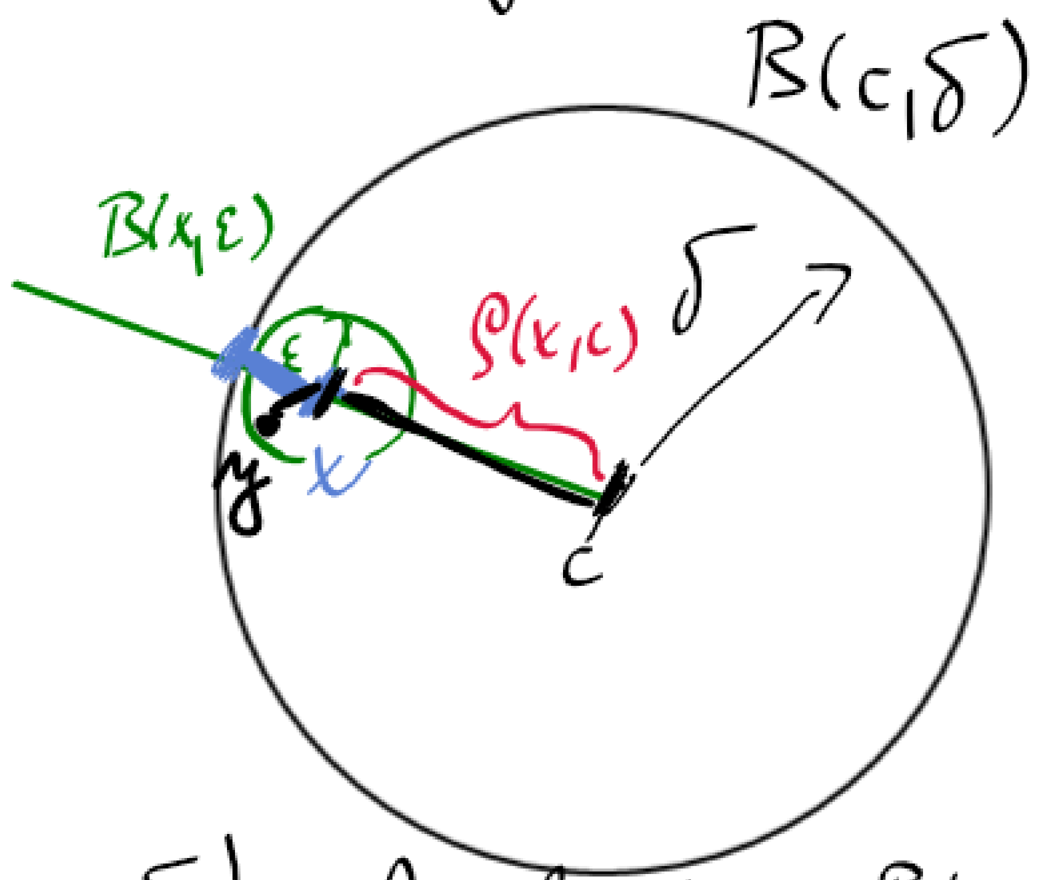
Chceme: $B(c,\delta)$ je otevřená.

Zvolme $x\in B(c,\delta)$; chceme: x je vnitřní b.

Podle definice $B(c,\delta)$:

$\rho(x,c) < \delta$, tj.

$$\delta - \rho(x,c) =: \varepsilon > 0$$



Tvrdím, že $B(x,\varepsilon)\subseteq B(c,\delta)$. Nechť $y\in B(x,\varepsilon)$.

$$\rho(c,y) \leq \rho(c,x) + \rho(x,y) = \delta-\varepsilon+\rho(x,y) <$$
$$< \delta-\varepsilon+\varepsilon = \delta.$$ Tedy $y\in B(c,\delta)$ ⊠

Věta 38 (Vlastnosti ot. množin) (M,ρ) ... MP

(i) $M, \emptyset$ jsou otevřené mn.

(ii) Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq M$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ je ot.

(iii) Je-li I libovolná množina indexů α a jsou-li $A_\alpha \subseteq M$ otevřené $(\alpha \in I)$, pak $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená množina.

(„Libovolné sjednocení otevřených je ot.")

Důkaz: (i) triviální (Rozmyslet!)

(ii) nechť $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$; chceme, že x je vnitřní bod toho průniku.

Pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$: A_i je otevřená podle předp., a tedy $x \in A_i$ je vnitřní bod A_i. Tj. $\exists \varepsilon_i > 0 : B(x,\varepsilon_i) \subseteq A_i$.

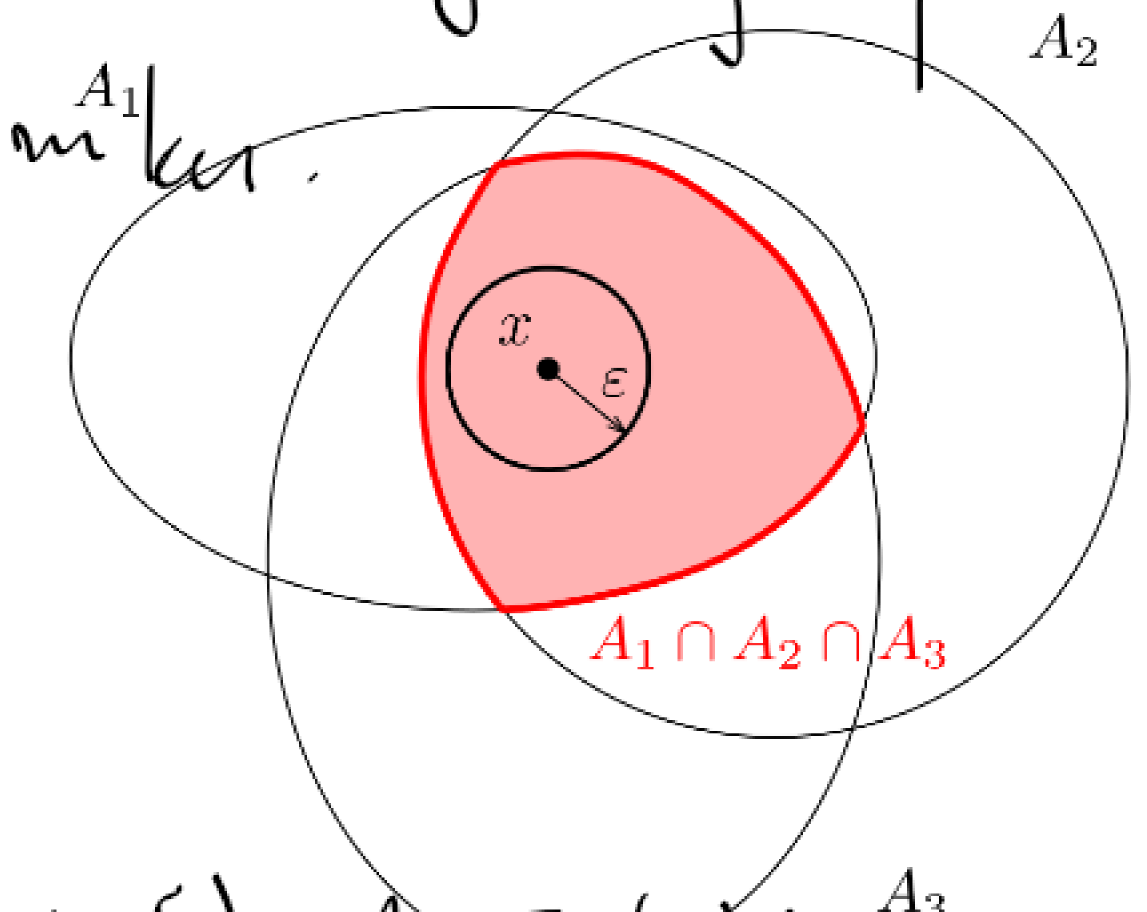
Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i \in \{1,\dots,n\}\} > 0$.

(min z konečné množiny kl. čísel je kl.)

Tvrdím, že $B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Pak $B(x,\varepsilon) \overset{\varepsilon \le \varepsilon_i}{\subseteq} B(x,\varepsilon_i) \subseteq A_i$, $i = 1,\dots,n$,

a tedy $B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Tj. x je opravdu vnitřní bod toho průniku.



(iii) $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff$

$\iff \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha$.

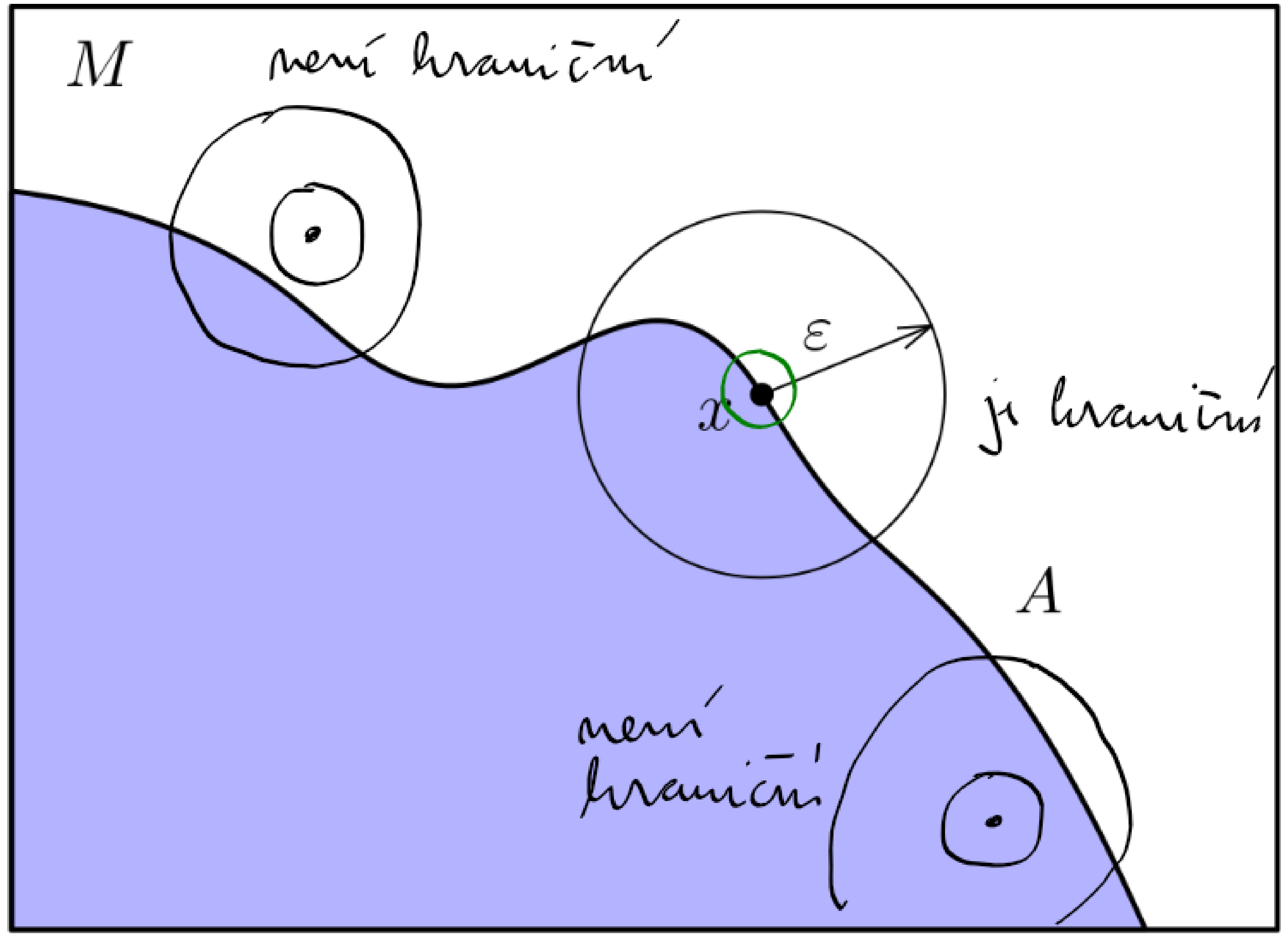
Ale A_α je ot. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup A_\alpha$. $\boxtimes$

Definice 39: (M,ρ) MP, $A \subseteq M$.

- $x \in M$ je hraniční bod A, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

(kde $A^c = M \setminus A$ ... komplement množiny A)



- hranice množiny A je množina

$$H(A) = \partial A = \{x \in M : x \text{ je hr. b. } A\}$$

- uzávěr A je $\overline{A} := A \cup H(A)$.

- množina je uzavřená, pokud

$$H(A) \subseteq A.$$